

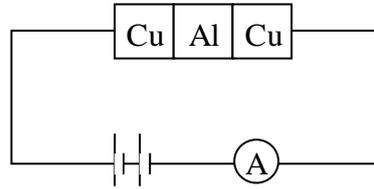
# ЛЕКЦИЯ № 5

## 8. Электропроводность металлов. Классическая электронная теория Друде-Лоренца

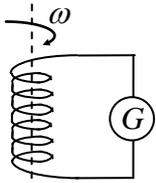
Металлы – хорошие проводники электрического тока.

Носители заряда?

1) 1901 г. опыт Рикке



2) Инертные свойства



Томсон, Стюарт – качественно

Мандельштам, Папалекси – количественно

вращение – остановка!

**Результат:** носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны.

Далее Друде и Лоренцом была создана классическая электронная теория электропроводности металлов.

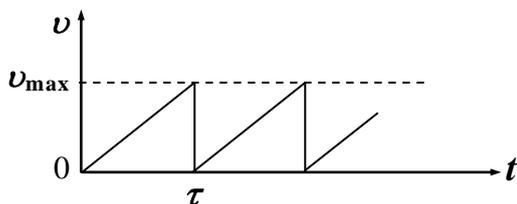
В ней металлы представляли собой твердые вещества, в узлах которых находятся положительные ионы, совершающие непрерывные колебания у положения равновесия. А отрицательные электроны представляют собой практически свободные частицы – отрицательно заряженный электронный газ (в качестве модели использовалась модель идеального газа).

В отсутствие электрического поля электроны участвуют лишь в хаотическом движении с  $\langle W_K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ , сталкиваясь лишь с узлами кристаллической решетки.

В электрическом поле электроны приобретают направленное движение против поля и двигаются с ускорением:

$$m_0 a = qE \quad v = v_0 + at = \frac{qE}{m_0} t$$

Но  $t \rightarrow \infty$ , т.к. происходит столкновение электронов с узлами кристаллической решетки.



$\tau$  – время между двумя последовательными столкновениями;

$\tau = \frac{\langle \ell \rangle}{\langle v \rangle}$ , где  $\langle \ell \rangle$  – средняя длина свободного пробега электронов  $\equiv$  меж-  
узельное расстояние кристаллической решетки;  
 $\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового (хаотического) движения электронов.

Вводя среднюю скорость дрейфа электронов по полю (среднюю скорость направленного движения)  $\langle v_d \rangle$

$$\langle v_d \rangle = \frac{1}{2} v_{\max} = \frac{qE}{2m_0} \tau,$$

можно записать значение плотности электрического тока в проводнике

$$j = qn_e \langle v_d \rangle = \frac{q^2 n_e E}{2m_0} \tau = \frac{q^2 n_e}{2m_0} \cdot \frac{\langle \ell \rangle}{\langle v \rangle} E. \quad (13-1)$$

где  $n_e$  – концентрация электронов в проводнике;

$q$  – заряд электрона.

Сравнивая полученный результат с законом Ома для участка электрической цепи в дифференциальной форме

$$j = \sigma E = \frac{1}{\rho_e} E,$$

можно записать выражение для удельной проводимости металлического проводника:

$$\sigma = \frac{q^2 n_e}{2m_0} \cdot \frac{\langle \ell \rangle}{\langle v \rangle}. \quad (13-2)$$

Аналогичные рассуждения можно провести для теплового действия тока (закон Джоуля-Ленца).

Электроны, разгоняясь в электрическом поле, приобретают кинетическую энергию:

$$W_K = \frac{m_0 v_{\max}^2}{2} = \frac{q^2 E^2 \tau^2}{2m_0}.$$

Тогда энергия всех электронов  $dN$ , приходящаяся на единицу объема  $dV$  металла за единицу времени свободного пробега приобретает значение

$$\frac{W_K \cdot dN}{dV \tau} = \frac{q^2 n_e}{2m_0} \tau E^2$$

Сравнивая полученный результат с законом Джоуля-Ленца для участка электрической цепи в дифференциальной форме:

$$\delta Q = I^2 R dt \rightarrow \delta Q = (jdS)^2 \frac{\rho_e d\ell}{dS} dt,$$

$$\frac{\delta Q}{dV dt} = \rho_e j^2 = \sigma E^2,$$

(где  $\frac{\delta Q}{dV dt}$  – объемная плотность тепловой энергии, выделенная в металле в единицу времени при протекании электрического тока), приходим к аналогичному результату (13-2) для удельной проводимости металлического проводника.

Полученный результат объясняет, почему разные металлы обладают разным электрическим сопротивлением.

$$R \sim \frac{1}{\sigma} = \frac{2m_0 \langle v \rangle}{q^2 n_e \langle \ell \rangle}:$$

1) у разных металлов разная концентрация свободных электронов, которая определяется валентностью атомов  $\alpha$  и концентрацией атомов  $n_{ат}$ :

$$n_e = \alpha n_{ат} = \alpha \frac{\rho N_A}{M},$$

где  $\alpha$  – валентность атома;

$\rho$  – плотность металла;

$N_A$  – постоянная Авогадро;

$M$  – молярная масса металла;

2) у разных металлов разное строение кристаллической решетки:

$$R \sim \frac{1}{\langle \ell \rangle};$$

3) средняя скорость теплового (хаотического) движения  $\langle v \rangle$  в разных металлах разная (даже при одинаковой температуре).

Полученный классической теорией результат объяснял температурную зависимость электрического сопротивления металла

$$R \sim \langle v \rangle \sim T.$$

Более того, идея использовать модель идеального газа для описания тепловых свойств в твердых телах позволила Дюлонгу и Пти получить выражение для молярной теплоемкости твердых тел, которое хорошо удовлетворяло экспериментальным результатам в широком диапазоне температур:

$$C_{vV} = 3R.$$

Однако, как раньше было рассмотрено, в области сверхнизких температур закон Дюлонга-Пти очень сильно расходился с экспериментом.

Более того, последовательное использование модели идеального газа приводила к результату, что молярная теплоемкость металлов должна была быть  $C_{vV} = 4,5R$ , что вообще противоречило эксперименту.

И, наконец, при изменении температуры металлического проводника его средняя скорость теплового (хаотического) движения меняется  $\sim \sqrt{T}$

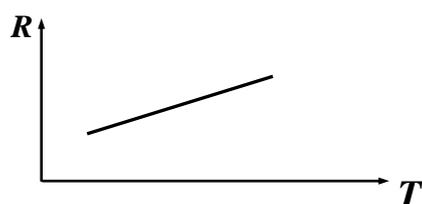
$$\langle W_{K_0} \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow \langle v \rangle \sim \sqrt{T}.$$

Значит, электрическое сопротивление  $R$  должно зависеть от абсолютной температуры  $T$  металла согласно (13-2), как

$$R \sim \sqrt{T}$$

т. к.  $n_e \neq f(T)$ ,  $\langle \ell \rangle \neq f(T)$ .

Но экспериментальные исследования зависимости  $R = f(T)$  показывали, что эта зависимость в широком интервале температур линейная.



$$R = R_0 (1 + \alpha T),$$

где  $\alpha = \frac{1}{273} \text{K}^{-1}$  – температурный коэффициент сопротивления металла.

Объяснить эти противоречия с экспериментом классическая электронная теория не смогла.

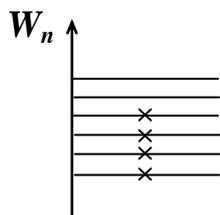
Все ответы были получены лишь в рамках квантовой физики.

## 9. Квантовая теория электропроводности металлов

В отсутствие внешнего электрического поля электронный газ в металлах находится в равновесном состоянии и описывается равновесными функциями распределения.

Для вырожденного газа такой функцией является функция Ферми-Дирака, а для невырожденного – функция Максвелла-Больцмана.

При равновесии электрического тока нет. Однако электроны в твердом теле движутся в периодическом потенциальном поле ионов. Их поведение описывается с помощью волновых функций, являющихся решением уравнения Шредингера. При этом энергия электронов квантуется, т. е. принимает дискретные значения.



Т. е. приходится следить не за поведением конкретного электрона, а за квантовым состоянием.

Тогда не важно, какой электрон, не важно, какая частица несет заряд и массу электрона...

Это «как бы» свободная частица – «квазичастица».

Рассматривая движение таких свободных квантовых частиц в периодическом поле кристалла, приходится наделять электроны особой массой – эффективной массой  $m^*$ .

Эффективная масса  $m^*$ , заключая в себе всю особенность, присущую электрону, движущемуся в периодическом поле кристалла, является весьма своеобразной величиной.

Прежде всего она может быть как положительной, так и отрицательной величиной, а по абсолютному значению может быть как намного больше массы электрона, так и намного меньше.

Электроны, расположенные у дна энергетической зоны, имеют положительную  $m^*$ , поэтому во внешнем электрическом поле они ведут себя «нормально» – ускоряются в направлении действия электрической силы.

Для электронов, находящихся у вершины энергетической зоны,  $m^* < 0$  (отрицательная), поэтому они ведут себя аномально – ускоряются по направлению поля.

Эффективная масса не определяет ни инертные, ни гравитационные свойства электрона. Она лишь характеризует его взаимодействие с электрическим полем кристалла.

Заменяя массу электрона на  $m^*$ , можно рассматривать электроны проводимости в металле как идеальный газ, но газ с совершенно необычными квантовыми свойствами. При этом электроны движутся в вязкой среде кристалла, которая препятствует их направленному движению, обладая некоторым сопротивлением.

Тогда можно получить оценку скорости дрейфа электронов в металле при наличии электрического поля

$$m^* a = qE - \mu v,$$

где  $\mu$  – коэффициент сопротивления кристалла движению электрона.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{m^*} \left( \frac{qE}{\mu} - v \right),$$

$$\frac{dv}{\frac{qE}{\mu} - v} = \frac{\mu}{m^*} dt \rightarrow \ln \left( \frac{qE}{\mu} - v \right) \Big|_0^{v_d} = -\frac{\mu}{m^*} t$$

откуда

$$v_d = \frac{qE}{\mu} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\mu}{m^*} t \right) \right].$$

При  $t \rightarrow \infty$   $v_d = \frac{qE}{\mu} = \text{const}.$

Так как  $e^{-\frac{\mu}{m^*} t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ , где  $\tau = \frac{m^*}{\mu}$  – время релаксации, т. е. время, за которое дрейфовая скорость изменяется в «e» раз.

$$\tau = \frac{m^*}{\mu} = \frac{\langle \ell \rangle}{\langle v_F \rangle},$$

где  $\langle \ell \rangle$  – средняя длина свободного пробега электронов, которому в металле мешают двигаться фононы (квазичастицы тепловых волн в кристаллах).

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d_{\text{эФ}}^2 n_f},$$

$n_f$  – концентрация фононов в кристалле,

$\langle v_F \rangle$  – средняя скорость электронов в кристаллах

$$\langle W \rangle = \frac{m^* \langle v_F \rangle^2}{2} = \frac{3}{5} W_F.$$

Тогда

$$j = q n_e v_d = \frac{q^2 n_e}{\mu} E = \frac{q^2 n_e}{m^*} \tau E,$$

откуда

$$\sigma = \frac{q^2 n_e \langle \ell \rangle}{m^* \langle v_F \rangle}. \quad (13-3)$$

Полученный результат практически совпадает с классическим (13-2), но величины, входящие в (13-3) и (13-2), имеют принципиальную разницу.

Классическая физика считала, что электроны при своем движении сталкиваются с узлами кристаллической решетки, проходя при этом в среднем расстояние  $\langle \ell \rangle$ , равное межузельному расстоянию, которое постоянно и  $\langle \ell \rangle \neq f(T)$ , а вот средняя скорость теплового (хаотического) движения  $\langle v \rangle = f(T)$ , причем  $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ .

Квантовая физика считает, что электроны при своем движении рассеиваются на тепловых флуктуациях кристаллической решетки (фононах), концентрация которых  $n_f$  сильно зависит от температуры, при этом средняя скорость теплового движения  $\langle v_F \rangle$  практически не зависит от температуры, т. к. тепловому возбуждения подвергается небольшое количество электронов, находящихся вблизи уровня Ферми

$$\left( \frac{\Delta N}{N_0} \approx \frac{k_B T}{W_F} \quad \text{при } T \sim 300\text{K} \quad \frac{\Delta N}{N_0} \sim 1\% \right).$$

$$\sigma \sim \langle \ell \rangle \sim \frac{1}{n_f}; \quad R \sim n_f.$$

В области высоких температур  $T \gg T_D$  все осцилляторы возбуждены вплоть до  $\omega_{\max}$ , тогда с ростом температуры  $n_f \sim T$  и

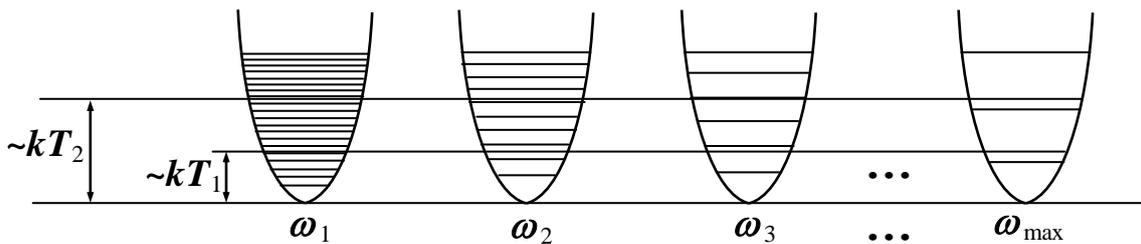
$$R \sim T,$$

что очень хорошо согласуется с экспериментом.

В области низких температур  $T \ll T_D$  с ростом температуры происходит не только увеличение фононов с данной частотой, но и быстрый рост новых фононов.

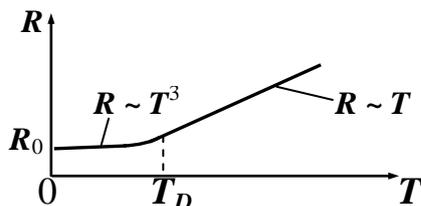
$$R \sim n_f \sim T^3 \quad (W \sim T^4, \quad c_M \sim T^3),$$

что также хорошо согласуется с экспериментом.



В области сверхнизких температур вблизи  $0\text{ K}$  концентрация фононов становится столь малой, что основную роль в рассеянии электронов начинают выполнять примеси, концентрация которых не зависит от температуры, и тогда

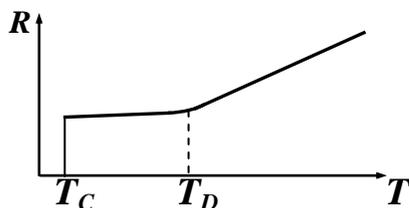
$$R \rightarrow R_0 = \text{const.}$$



## 10. Сверхпроводимость и ее квантовая теория

1911 г. нидерландский физик Камерлинг-Оннес

Жидкая ртуть при  $T = 4,2\text{ K}$   $R \rightarrow 0$



1) Сопротивление многих металлов при  $T \sim 0\text{ K} \rightarrow 0$   
 (при  $T = 300\text{ K}$   $\rho_{Cu} \sim 10^{-8}$  Ом·м, а при  $T_C$   $\rho_{Cu} \sim 10^{-25}$  Ом·м – это  $\sim$  в  $10^{17}$  раз!!!)

2) В 1933 г. было обнаружено, что магнитное поле при  $T \leq T_C$  выталкивается из металла независимо от того, чем оно было создано – внешним источником или током, текущим по самому проводнику. Т. о., магнитное поле в проводнике при  $T \leq T_C$  всегда равно нулю, т. е. при  $T \leq T_C$  металлы становятся диамагнетиками ( $\mu < 1$ ,  $\mu \rightarrow 0$ ).

Это явление было названо сверхпроводимостью, а металлы в таком состоянии – сверхпроводниками.

Т. о. сверхпроводник является не только идеальным проводником, но и идеальным диамагнетиком.

При температуре выше критической ( $T > T_C$ ) сверхпроводники становятся обычными проводниками.

Возможности использования сверхпроводников в науке и технике:

1) в электротехнике и энергетике:

- Ленц-Джоулево тепло  $\delta Q = I^2 R dt$

$\sim 30 \div 40\%$  на «отопление Вселенной»...

резкое повышение КПД установок!

2) сверхпроводящие катушки → сильные магнитные поля → управляемый термоядерный синтез, поезда на магнитной подвеске...

3) слабосвязанные сверхпроводники → ЭВМ, СВЧ усилители и др. полупроводниковые устройства.

Что же сдерживает широкое использование сверхпроводников?

1) температурный барьер → жидкий гелий  $T_{C\max} \sim 23\text{ K}$ ;

2) большие финансовые затраты на создание условий для сверхпроводимости.

1987 г. – немецкие химики – пластичные керамические материалы, которые переходят в сверхпроводящее состояние при температурах жидкого азота или жидкого кислорода.

Но причины, сдерживающие их широкое применение, остаются прежними.

В 1957 г. американскими физиками Бардиным, Купером и Шриффером было дано квантовое объяснение явления сверхпроводимости (БКШ-теория).

Электроны являются фермионами, для них спиновое квантовое число  $s = \frac{1}{2}$ . При снижении абсолютной температуры электроны стремятся занять энергетические состояния с наименьшей энергией (принцип минимума энергии), но принцип запрета Паули не дает им занять всем самое нижнее состояние в валентной зоне. Поэтому электроны располагаются по уровням вплоть до уровня Ферми (при  $T = 0\text{ K}$ ).

Тогда даже слабое электрическое поле возбуждает электроны, а при своем движении они сталкиваются с фононами, примесями и т. п., теряют энергию и переходят на уровни с меньшей энергией.

Т. е. наличие ненулевого сопротивления говорит о том, что идеальная проводимость невозможна.

Вот если бы электроны были бозонами и могли бы «сконденсироваться» на самом нижнем энергетическом уровне.

Но у бозонов  $s = 1$ , для этого электроны нужно как-то объединить в «пары». Электроны – имеют электрический заряд, поэтому как они могут объединиться?

В БКШ-теории предполагается, что при сверхнизких температурах ( $T \leq T_C$ ) положительно заряженные ионные остатки кристаллической решетки стягивают электроны, и те образуют квазичастицы с целым спином – «куперовские пары», которые накапливаются на нижнем уровне, образуя между этим уровнем и уровнем Ферми «энергетическую щель», для преодоления которой требуется дополнительная энергия ( $T \geq T_C$ ).

При достижении  $T \geq T_C$  куперовские пары разрушаются, и сверхпроводник становится обычным проводником.