Определение упругих характеристик твердых тел

Любое реальное тело под действием силы изменят свою форму или, как говорят, твердое тело деформируется. Изучая динамику твердого тела, пренебрегается деформациями тела, полагая, что они достаточно малы и не влияют на движение тела (модель абсолютно твердого тела).

Деформация твердого тела называется упругой, если после прекращения действия силы она исчезает, т.е. форма тела восстанавливается. Если деформация сохраняется и после прекращения внешнего воздействия, то ее называют пластической.

Виды деформаций. Наиболее простыми видами деформаций являются деформация растяжения-сжатия и деформация сдвига. Деформация растяжения-сжатия изменение формы тела в направлении действия силы, деформация сдвига – в направлении, перпендикулярном линии действия силы. Все другие деформации могут быть представлены как сумма этих простейших деформаций.

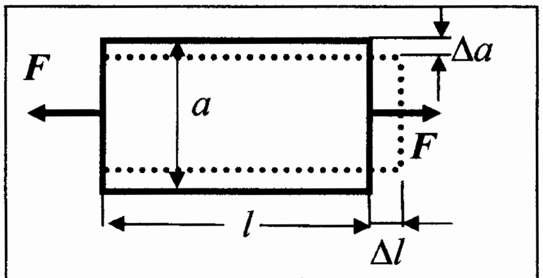

Рис.1

Деформация растяжения-сжатия возникает, к примеру, в стержне при действии силы, направленной вдоль оси стержня. Если стержень однороден, то при заданной нагрузке любой кусочек стержня будет растянут (сжат) в одинаковой степени. Говорят, что стержень имеет однородную деформацию растяжения-сжатия, которую принято характеризовать относительным удлинением $\varepsilon = \Delta l/l$, где Δl – удлинение участка стержня, имеющего первоначальную длину l.

Всякое растяжение (сжатие) тела сопровождается уменьшением (возрастанием) его поперечного размера. Характеристикой изменения поперечного размера является относительное поперечное сжатие (растяжение) $\varepsilon_П=\Delta a/a$, где Δa – изменение поперечного размера тела, имеющего до деформации поперечный размер a. Очевидно, что ε и $\varepsilon_П$ имеют разные знаки. Опыт показывает, что $\varepsilon_П = \mu\varepsilon$. Коэффициент пропорциональности μ называется коэффициентом Пуассона или модулем поперечного сжатия. Он не зависит от размеров тела и определяется лишь свойствами вещества.

Достаточно просто можно показать, что у тел, объем которых не меняется при деформации, с большой точностью коэффициент Пуассона $\mu=1/2$. Пусть до растяжения тело имело форму параллелепипеда длиной l, имеющего квадратное сечение со стороной a. Его объем $V=a^2l$. После растяжения размеры тела изменились и стали соответственно $l_1=l(1+\varepsilon)$ и $a_1=a(1+\varepsilon_П)$, так что его объем $V_1=a_1^2l_1$. По предположению $V=V_1$. Тогда имеем

$$a^2l=a_1^2l_1=a^2l(1+\varepsilon_П)^2(1+\varepsilon)=a^2l(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2=a^2l(1+\varepsilon-2\mu\varepsilon+\mu^2\varepsilon^2-2\mu\varepsilon^2+\mu^2\varepsilon^3)$$

После сокращений получаем - $\varepsilon(1-2\mu)+O(\varepsilon^2)=1$. Отсюда, т.к. $\varepsilon>0$, следует $\mu=1/2$.

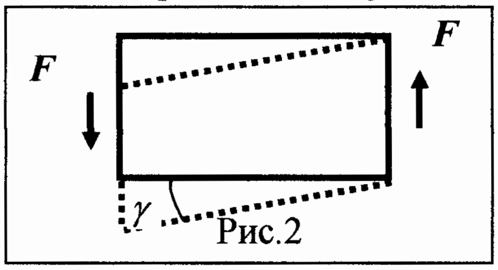

Рис.2

На самом деле у реальных тел $\mu \div 0{,}25 - 0{,}5$. Это означает, что при растяжении объем тела увеличивается, а при сжатии – уменьшается.

Другим простейшим видом деформации является деформация сдвига. При такой деформации сила, касательная одной из граней параллелепипеда, сдвигает ее относительно другой закрепленной грани, превращая его в косоугольный параллелепипед (рис.2). Любая плоскость параллелепипеда, перпендикулярная направлению действия силы, при этом повернется на некоторый угол γ, называемый углом сдвига, так что деформация сдвига также является однородной деформацией.

Тангенс угла γ называется относительным сдвигом и является количественной характеристикой деформации сдвига. Однако, поскольку угол γ обычно очень мал, то $tg\gamma = \gamma$, и за количественную меру сдвига принимают просто угол сдвига γ.

Часто встречаются деформации изгиба и кручения. Их можно рассматривать как неоднородные деформации расширения-сжатия и сдвига. Об этих деформациях более подробно будет говориться ниже. В общем случае можно показать, что произвольная малая деформация всегда сводится к деформациям растяжения-сжатия и сдвига элементарно малых объемов.

Внутренние силы и напряжения. Твердое тело состоит из частиц, например, атомов, расположенных в относительном порядке. Эти равновесные положения атомов характеризуются тем, что потенциальная энергия их взаимодействия минимальна, а сумма сил, действующих на каждый атом со стороны соседей равна нулю. Но когда под действием внешней силы относительное положение частиц изменяется вследствие их взаимного смещения, силы, действующие на атомы, перестают уравновешивать друг друга: если при смещении атомы удаляются друг от друга, возникающие силы являются силами притяжения; наоборот, если атомы сближаются, возникают силы отталкивания между ними. В силу этого, после прекращения действия силы, вызвавшей атомные смещения, атомы возвращаются в исходное положение в узлах решетки. Для этого необходимо, чтобы смещение атомов были малы (порядка межатомных расстояний). Такая модель приводит к выводу о существовании внутренних сил, стремящихся вернуть деформированное тело в исходное состояние.

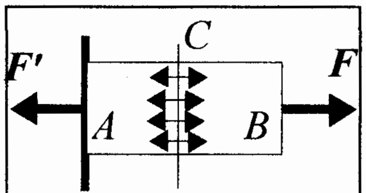

Рис.3

Пусть конец A стержня закреплен, а на конец B действует сила $\boldsymbol{F}$ и растягивает стержень (рис.3). Так как стержень неподвижен, то со стороны закрепления на стержень действует еще и сила $\boldsymbol{F}'$, равная по величине и обратная по направлению силе $\boldsymbol{F}$. Проведем мысленно сечение и выделим часть стержня AC. Он, очевидно, тоже неподвижен. Значит на него со стороны остальной части CB действуют внутренние силы, суммарная величина которых равна $\boldsymbol{F}$. Если тело однородно, то внутренние силы должны быть равномерно распределены по сечению.

Таким образом, удобно за меру внутренних сил, действующих со стороны одной части деформированного тела на другую, считать отношение величины суммарной силы F к площади сечения S. Это отношение называется напряжением. Если сила F перпендикулярна площадке площадью S, то говорят о нормальном напряжении - $\sigma = F/S$. Если сила направлена по касательной к поверхности сечения, то напряжение называют касательным - $\tau = F/S$. Очевидно, что $[\sigma]=[\tau]=Н/м^2=Па$

Связь между деформацией и напряжением. Как показывает опыт, относительная деформация ε определяется напряжением σ. Эта зависимость для реальных материалов достаточно сложна и определяется экспериментально. Полученная на основании этих опытов диаграмма зависимости напряжения σ от деформации ε приведена на рис.4. (Экспериментальная зависимость τ от γ имеет аналогичный характер.)

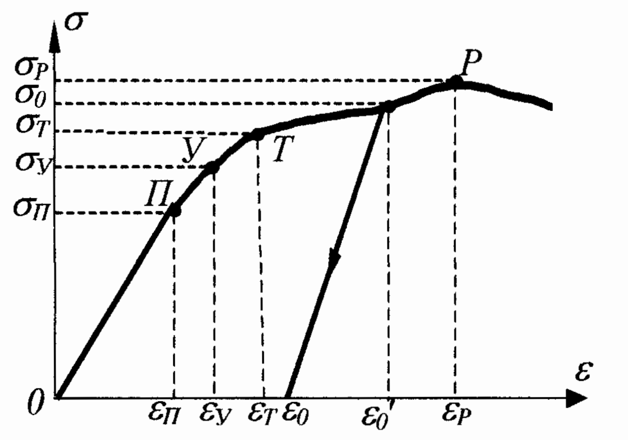

Рис.4

При небольших усилиях напряжения σ и деформация ε примерно пропорциональны друг другу. Так продолжается до точки *П* с координатами $\sigma_П$ и $\varepsilon_П$. Этот участок кривой называется <u>областью пропорциональности</u>. Далее деформация начинает нарастать быстрее, кривая изгибается в сторону оси деформаций, а от точки *Т* кривая идет на некотором участке даже примерно параллельно оси деформаций – напряжения почти не увеличиваются, а деформации растут. Область деформаций (или напряжений), соответствующих участку кривой, начинающемуся с точки *Т*, называется <u>областью текучести</u> или <u>областью пластической деформаций</u>. Далее, с увеличением деформаций ε, кривая немного возрастает, достигая в точке *Р* максимума, и затем, спадая, обрывается. Конец кривой соответствует разрыву материала. Очевидно, что разрыв произойдет уже после того, как напряжение достигнет максимальной величины σ_P.

Если σ увеличивать до некоторого значения $\sigma_У$ (ордината точки *У* на кривой), то при последующем уменьшении нагрузки до нуля образец примет первоначальные размеры, причем при разгрузке зависимость $\sigma(\varepsilon)$ будет проходить те же самые значения, что и при нагрузке. Это означает, что на участке от 0 до $\sigma_У$ зависимость деформации от напряжения <u>однозначна</u>, на этом участке деформации <u>обратимы.</u> Только при таких деформациях, которые меньше $\varepsilon_У$, образец ведет себя как упругое тело. Значение $\sigma_У$ лежит между значениями $\sigma_П$ и σ_P, и называется <u>пределом упругости.</u>

При напряжении больше, чем $\sigma_У$, кривые, соответствующие нагрузке, уже не будут совпадать с кривыми, соответствующими разгрузке; при разгрузке при тех же значениях напряжения получатся большие значения деформации, и когда образец будет разгружен полностью, его деформация не будет равна нулю. Говорят, что в этом случае возникают <u>остаточные деформации.</u> Так, ε_0'если довести величину деформации до какого-то значения ε_0', лежащего в области пластической деформации, и будем снимать нагрузку, то величина деформации будет уменьшаться, как примерно показано на рис.4. При полном снятии нагрузки остаточная деформация ε_0 будет иметь практически такую же величину, как и ε_0'.

Теоретическая зависимость $\sigma(\varepsilon)$, описывающая всю экспериментальную кривую, неизвестна. Однако при малых деформациях, когда существует прямая пропорциональность между σ и ε, аналитическое выражение для $\sigma(\varepsilon)$ чрезвычайно просто. Эта зависимость носит название <u>закона Гука</u> и имеет вид:

для деформации сжатия-растяжения - $\sigma = E\varepsilon$, (1)

и для деформации сдвига - $\tau = G\gamma$. (2)

В формуле(1) коэффициент пропорциональности E называется модулем Юнга. Коэффициент пропорциональности G в формуле (2) называется модулем сдвига. Из формул(1) и (2) следует также, что $[E]=[G]=Н/м^2=Па$.

Эти физические величины являются важными характеристиками вещества. Так как любые малые деформации могут рассматриваться как сочетание деформаций растяжения-сжатия и сдвига, то в области действия закона Гука упругие свойства полностью определяются этими двумя постоянными для данного вещества величинами.

Таким образом, для описания упругих свойств деформируемых тел используются три величины – коэффициент Пуассона μ, модуль Юнга E и модуль сдвига G. В теории упругости показывается, что для изотропных материалов между этими упругими характеристиками имеется связь – $E/G=2(1+\mu)$. Учитывая, что для реальных материалов $\mu \div 0{,}25 - 0{,}5$, то G всегда меньше E и лежит в диапазоне $E/3<G<2E/5$.

Знание величин E и G очень важно в технических приложениях при расчете прочности различных конструкций. Кроме того, эти величины несут богатую информацию о структуре материала, о параметрах межмолекулярных взаимодействий. Величины E и G определяются экспериментально. Наиболее просто в экспериментальном отношении эти величины определяются по деформациям изгиба и кручения

Изгиб. Усилия и деформации при изгибе стержней. Очень важным примером деформации твердого тела является изгиб стержней под действием сил, приложенных перпендикулярно (нормально) к оси стержня (поперечных нагрузок). Под стержнем понимают тело, размеры которого в одном направлении (в длину) больше, чем в двух других.

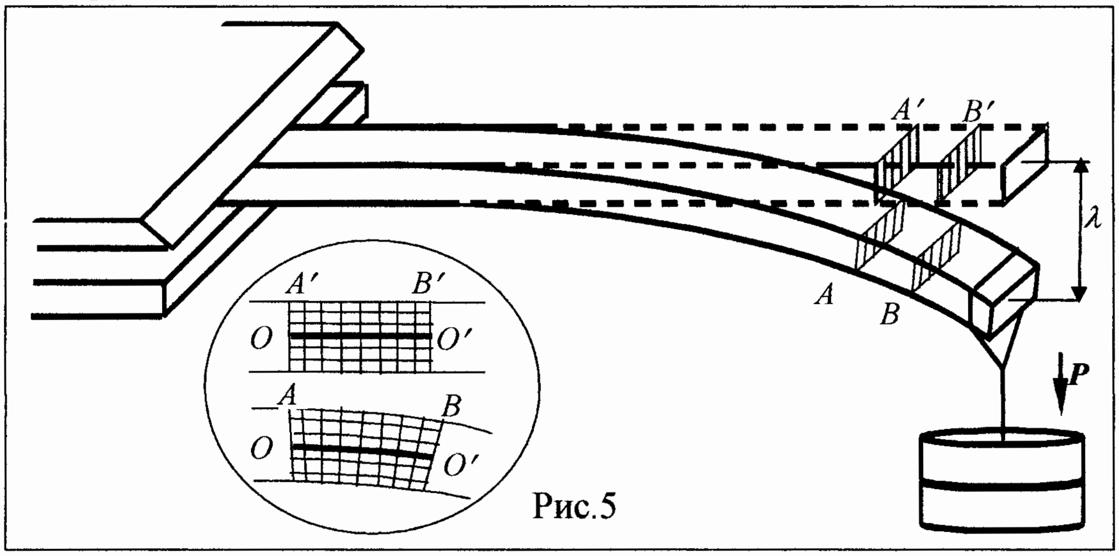

Рис.5

Если прямой упругий стержень жестко закрепить одним концом в твердой стенке, а другой, свободный конец, нагрузить вертикальной силой P, то этот конец опустится, т.е. стержень согнется. Если мысленно выделить некоторую часть изогнутого стержня и сравнить ее с соответствующей частью недеформированного стержня, то видно, что часть стержня, лежащая над его осью, растянута, а часть, расположенная под ней, сжата (рис.5). Мы можем представить себе стержень как бы состоящим из параллельных его оси волокон, к которым приложены силы упругости, возникающие при деформации. Они перпендикулярны площади сечения и поэтому вызвавшая их деформация является деформацией растяжения-сжатия.

Перемещение λ, которое получает свободный конец стержня, называется стрелой прогиба. Стрела прогиба будет тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, она должна зависеть от формы и размеров стержня и от упругих свойств материала.

Точный анализ деформаций и напряжений упруго изогнутого стержня представляет довольно сложную задачу. Но приближенное исследование сравнительно просто. Оно основано на гипотезе, предложенной еще Бернулли и заключающейся в том, что при изгибе стержня все поперечные сечения остаются плоскими.

Рассмотрим вначале стержень длиной L, один конец которого защемлен, а свободный конец нагружен вертикальной силой P. Выясним, каким образом вертикальная сила P определяет характер сил в стержне, приводящих к растяжению верхних слоев и сжатию нижних. Для этого мысленно рассечем стержень в каком-либо месте на расстоянии l от закрепления и определим, какие силы должны действовать в сечении на отделенную часть стержня, чтобы она оставалась в равновесии (рис.6).

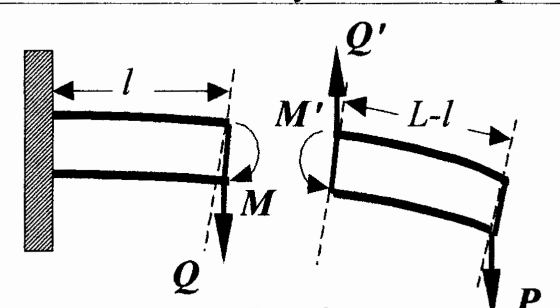

Рис.6

Для равновесия отрезанной части необходимо, чтобы касательно к сечению существовало усилие Q', численно равное P и противоположено направленное. Усилие Q' называют перерезывающей силой. Очевидно, что она в любом сечении имеет одинаковую величину, равную P. К оставшейся части перерезывающая сила Q приложена в другом направлении и имеет ту же величину.

Но пара сил P и Q, действующих на отрезанную часть, создает момент силы

$$M_l=P(L-l). \tag{3}$$

Поэтому для равновесия отрезанной части необходимы еще пары сил, момент которых равен и противоположен моменту M_l. Эти силы могут быть приложены только в сечении разреза. Следовательно, стержень должен деформироваться так, чтобы создать в поперечном сечении такие нормальные усилия, которые образуют момент M', который равен по величине моменту M_l и противоположен ему по знаку. Отсюда следует, что M – момент усилий, приложенных к оставшейся части, равен M_l, т.е.

$$M = -M' = M_l=P(L - l) \tag{4}$$

Таким образом, усилия, действующие в сечении, будут состоять из нормальных напряжений, связанных с растяжением и сжатием слоев, и касательных напряжений, обеспечивающих перерезывающую силу Q. Однако сравнение расчета с опытом показывают, что влияние касательных усилий невелико и поэтому расчет деформаций элементов стержня можно вести так, как если бы касательных усилий вообще не было.

Итак, под действием силы, приложенной к свободному концу стержня, к любому сечению стержня будет приложен момент сил (4), который будет поворачивать плоскость сечения на некоторый угол. Причем этот угол будет тем больше, чем дальше это сечение расположено от закрепленного конца стержня, так как с увеличением l растет и M.

Вырежем из стержня кусочек достаточно малой длины dl. При изгибе этот кусочек будет деформироваться примерно так, как показано на рис.7. Оба поперечных сечения покосились при деформации стержня на угол $d\varphi$. Слой, прилегающий к средней линии OO', не изменит своей длины, поэтому его называют нейтральным; слои, находящиеся выше нейтрального слоя, удлинятся, например, слой MN; слои, расположенные ниже него, будут укорочены, сжаты, как, например, слой PQ. Укорочение и сжатие слоев пропорционально расстоянию слоя от нейтрального слоя, так как поперечное сечение при деформации остается плоским.

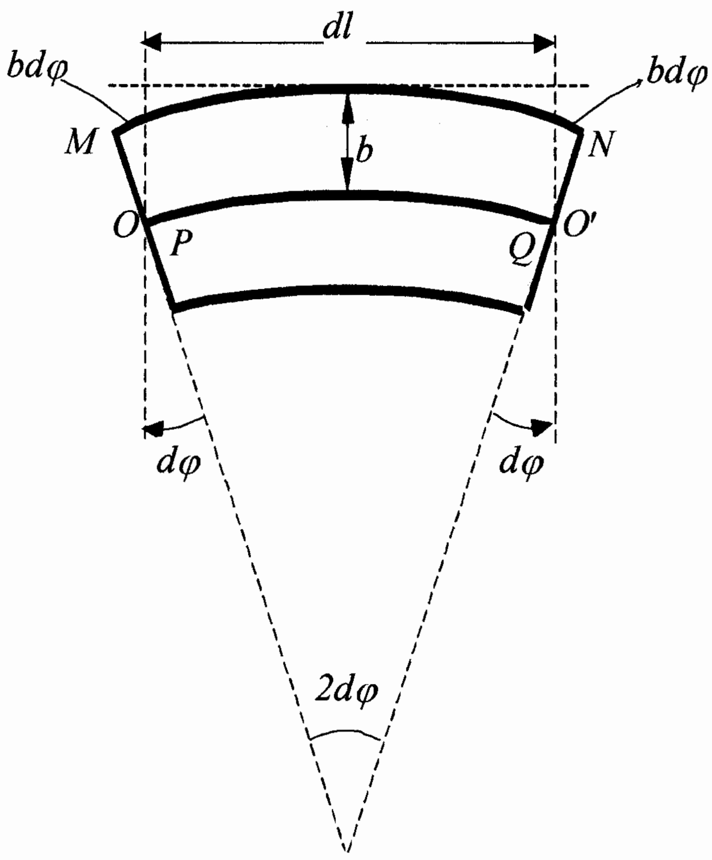

Рис.7

Если величина деформации слоев не выходит из зоны пропорциональности, то нормальное напряжение в каждом из слоев пропорционально его удлинению или укорочению. Обозначив через x расстояние от нейтрального слоя до данного, можно записать

$$\sigma \sim \text{удлинение (укорочение) слоя} \sim x \qquad \text{или} \qquad \sigma = Ax.$$

Коэффициент пропорциональности A можно найти из следующих рассуждений. Рассмотрим поперечное сечение стержня произвольной формы (рис.8). Если стер-

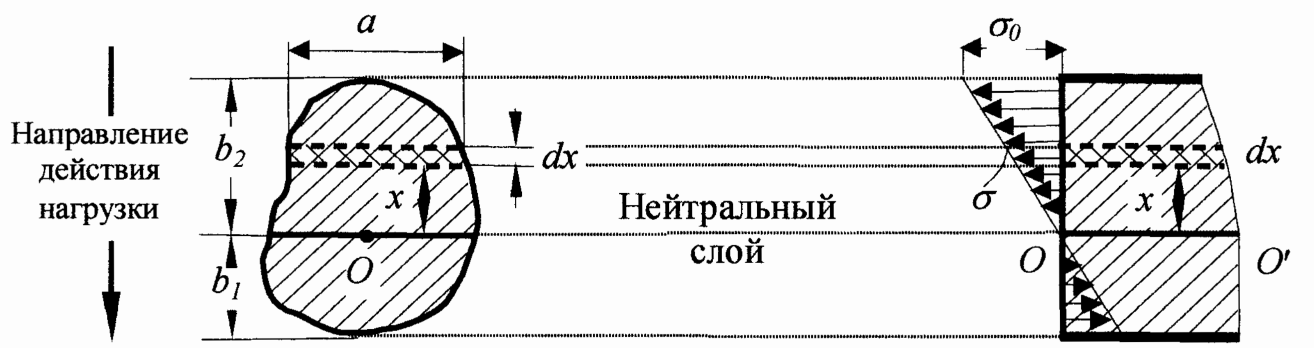

Рис.8

жень изгибается в плоскости, перпендикулярной к оси момента M (плоскости нагрузки), то нейтральная слой будет проходить через центр масс сечения O перпендикулярно к плоскости нагрузки. Нормальное напряжение в слое, находящемся на наиболее удаленном от нейтрального слоя расстоянии b (большее из b_1 и b_2), будет равно $\sigma_0 = Ab$. Отсюда $A = \sigma_0/b$. Тогда

$$\sigma = (\sigma_0/b)\, x. \tag{5}$$

Таким образом, в слое высотой dx, удаленном от нейтрального на расстоянии x, будут действовать упругие напряжения, вычисляемые по формуле (5). Сила упругости dF и момент этой силы dM, действующие на слой, равны

$$dF=\sigma\, dS=(\sigma_0/b)\, x\cdot a\cdot dx, \qquad dM=x\, dF=(\sigma_0/b)\, a\, x^2\, dx \tag{6}$$

Здесь a – ширина слоя, которая в общем случае зависит от x, т.е. $a=a(x)$.

Теперь можно подсчитать полный момент сил в поперечном сечении стержня, очевидно, он будет равен интегралу от (6) по всему сечению.

$$M=\frac{\sigma_0}{b}\int_{b_1}^{b_2} a(x)\cdot x^2 dx \text{ или } M=\frac{\sigma_0}{b}I\text{, где } I=\int_{b_1}^{b_2} a(x)\cdot x^2 dx \tag{7}$$

Величина I зависит только от геометрической формы и размеров сечения, и в силу формального сходства с выражением для момента инерции плоского тела ($J=\int \rho(x)\cdot x^2 dx$), иногда называется моментом инерции поперечного сечения стержня.

Получим уравнение для определения стрелы прогиба λ. Для этого выразим σ_0 через относительную деформацию наиболее удаленного слоя. Из рис.7 видно, что верхний слой, имеющий первоначально длину dl, после деформации удлинился на величину $2bd\varphi$, так что относительное удлинение составило $\varepsilon_0=2bd\varphi/dl$. Согласно закону Гука $\sigma_0=E\varepsilon_0=2bEd\varphi/dl$. Подставляя это выражение в (7) получаем

$$M=2EI\frac{d\varphi}{dl} \quad \text{или} \quad 2d\varphi=\frac{M}{IE}dl. \tag{8}$$

Момент силы M, действующий в сечении, находящемся на расстоянии l от защемления определяется формулой (4). Тогда (8) приобретает вид

$$2d\varphi=\frac{P}{IE}(L-l)dl. \tag{9}$$

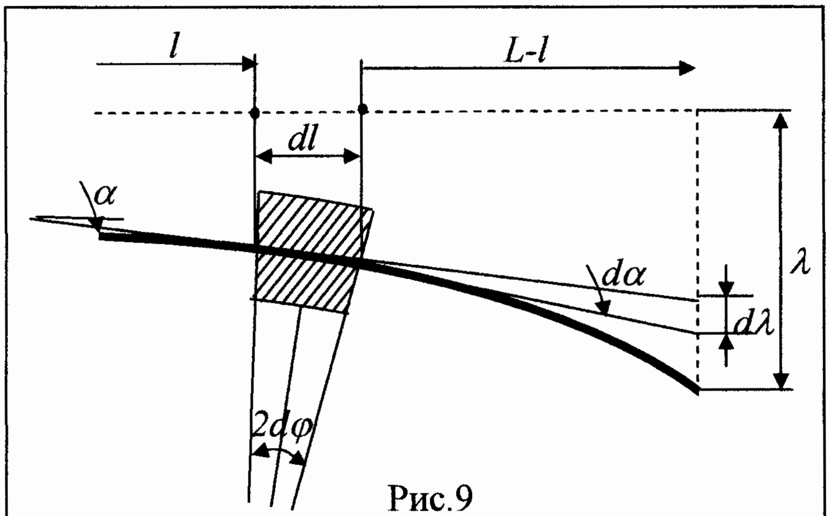

Рис.9

Степень изогнутости удобно характеризовать углом α между касательной к нейтральной линии в точке с координатой l и направлением недеформированного стержня (рис.9). При переходе от точки с координатой l к точке с координатой $l+dl$ угол наклона касательной изменяется на величину $d\alpha$. Несложно показать, что $d\alpha = 2d\varphi$. На самом деле, боковые стороны элемента стержня перпендикулярны нейтральной линии и, следовательно, перпендикулярны касательным к нейтральной линии, проведенным в точках с координатами l и $l+dl$. Другими словами углы $d\alpha$ и $2d\varphi$ это углы с взаимно перпендикулярными сторонами и, значит, они равны друг другу. Соотношение (9) теперь можно переписать в следующем виде

$$d\alpha = \frac{P}{IE}(L-l)dl\,. \qquad (10)$$

Как видно из рис.9, изгиб элемента стержня длиной dl, находящегося на расстоянии $L\text{-}l$ от свободного конца стержня, на величину $d\alpha$ дает вклад в стрелу прогиба, равный $d\lambda=(L-l)d\alpha$. Таким образом, получаем

$$d\lambda = (L-l)d\alpha = \frac{P}{IE}(L-l)^2\,dl\,. \qquad (11)$$

Чтобы найти всю стрелу прогиба надо просуммировать вклады (11), создаваемые каждым элементом стержня. Иначе говоря, надо взять интеграл от выражения (11) в пределах от 0 до L, то есть

$$\lambda = \int\limits_0^L \frac{P}{IE}(L-l)^2\,dl = \frac{P}{IE}\cdot\frac{-(L-l)^3}{3}\Big|_0^L = \frac{L^3}{3IE}P\,. \qquad (12)$$

Это стрела прогиба стержня, неподвижно закрепленного с одной стороны и несущего груз на свободном конце. В случае, если стержень обоими концами свободно положен на твердые опоры и нагружен в середине весом P (рис.10), то стрела прогиба найдется также из уравнения (11), но только вместо величины P надо будет подставить $P/2$ и интегрировать не от 0 до L, а от 0 до $L/2$. В самом деле, в этом случае изгиба каждая из опор действует на стержень силой $P/2$, тогда как средняя часть остается горизонтальной. Таким образом, стержень, опирающийся обоими концами ведет себя точно также, как если бы он был закреплен посередине, а на каждый из обоих концов, находящихся на расстоянии $L/2$ от середины его, действовала вверх сила $P/2$

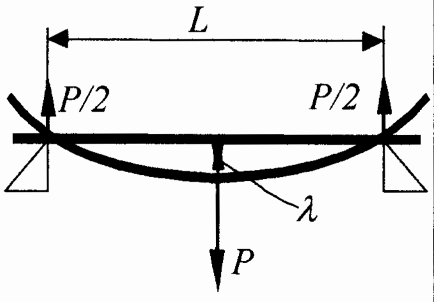

Рис.10

Следовательно, в этом случае стрела прогиба будет равна

$$\lambda = \int\limits_0^{L/2} \frac{P/2}{IE}\cdot(L-l)^2\,dl = \frac{P/2}{IE}\cdot\frac{-(L-l)^3}{3}\Big|_0^{L/2} = \frac{L^3}{48IE}P\,. \qquad (13)$$

В заключение следует заметить, что для использования формул (12) и (13) необходимо знание величины I, которая вычисляется по формуле (7) для заданной формы сечения стержня. Эти вычисления будут проделаны в описания к конкретным лабораторным работам.

Кручение. Деформации и напряжения при кручении. Пусть стержень радиусом R и длиной L из материала, модуль сдвига которого равен G, закручен моментом сил $M_{ЗАК}$ на угол φ_0. Это значит, что основания его повернулись на угол φ_0 относительно друг друга.

В любом сечении стержня, перпендикулярном к оси, момент внутренних усилий относительно оси стержня равен M – моменту сил, закручивающих стержень. Действительно, представим мысленно отрезанной какую-либо часть B закрученного стержня (рис.11). Так как часть B находится в покое, то моменты всех сил, действующих на нее, равны нулю. С одного конца на эту часть действует момент внешних сил $M_{ЗАК}$, а с другого – момент внутренних усилий M, касательных к сечению. Величина M равна $M_{ЗАК}$ и противоположена по знаку. К оставшейся части момент

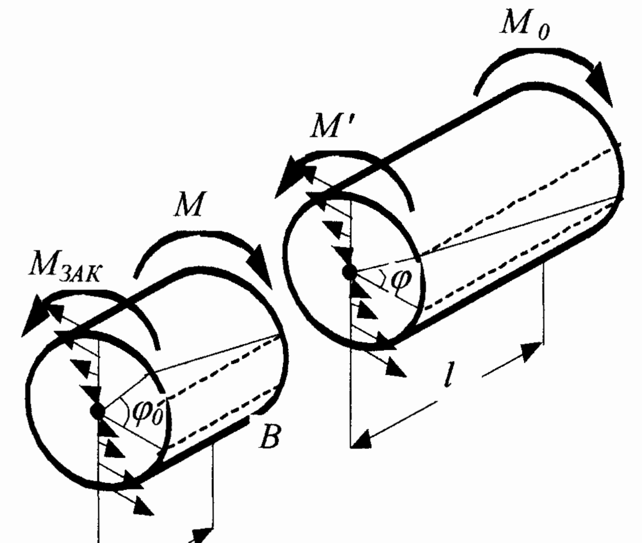

Рис.11

внутренних усилий M' приложен противоположено M. Очевидно, что M' равен по величине и противоположен по знаку M_0 – моменту сил, действующих на стержень со стороны закрепления.

Определим, как распределены касательные напряжения в сечении стержня и как они связаны с деформацией. Вырежем из стержня диск малой высоты dl на расстоянии l от неподвижного основания и положим, что нижнее основание этого диска при закручивании повернулось на угол φ, а верхнее на угол $\varphi+d\varphi$. Из этого диска вырежем кольцо с внутренним радиусом r и внешним $r+dr$ (рис.12).. Тогда кубик, вырезанный из кольца, будет иметь одинаковую деформацию сдвига на один и тот же угол $d\gamma$. Так как верхнее основание диска поворачивается относительно нижнего на малый угол $d\varphi$, не деформируясь, то, очевидно, что угол сдвига $d\gamma$ будет пропорционален радиусу кольца r. Смещение верхней поверхности кольца относительно нижней будет равно $da=dl\cdot d\gamma=rd\varphi$. Поэтому угол сдвига

$$d\gamma = r\frac{d\varphi}{dl}, \qquad (14)$$

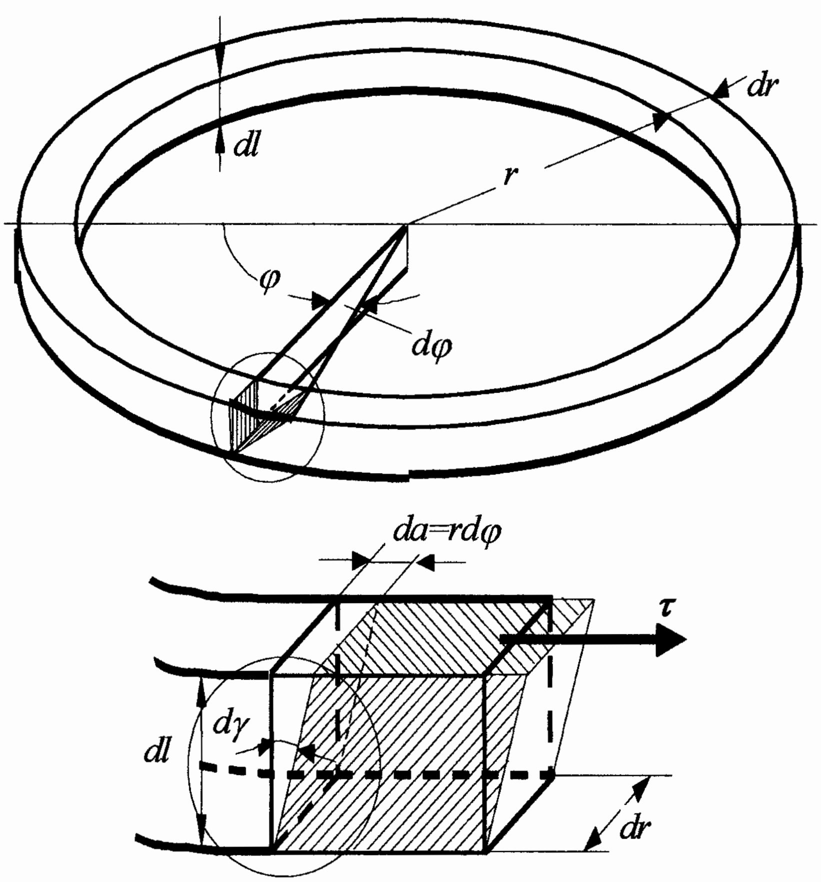

Рис.12

т.е. угол сдвига кольца равен радиусу кольца, умноженному на производную от угла закручивания стержня по длине.

Теперь определим касательное усилие на поверхности кольца, имеющего площадь, равную $2\pi r\, dr$. По формуле (2)

$$\tau = Gd\alpha = Gr\frac{d\varphi}{dl}, \qquad (15)$$

поэтому усилие на поверхности кольца составляет

$$\tau \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi r^2 G\frac{d\varphi}{dl}dr$$

Момент этого усилия относительно оси стержня равен

$$dM = 2\pi r^3 G\frac{d\varphi}{dl}dr\,. \qquad (16)$$

Теперь сложим моменты усилий по всей поверхности диска или проинтегрируем (16) по r:

$$M = 2\pi G\frac{d\varphi}{dl}\int_0^R r^3 dr = 2\pi G\frac{d\varphi}{dl}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}G\cdot\frac{d\varphi}{dl}. \qquad (17)$$

Этот момент должен быть равен моменту, закручивающему стержень, $M_{ЗАК}$, так как моменты, приложенные к любым двум соседним дискам, равны друг другу. Уравнение (17) показывает, что если стержень однороден, то производная угла закручивания $d\varphi/dl$ постоянна вдоль стержня. Угол закручивания торцевых сечений, находящихся на расстоянии L друг от друга, равен

$$\varphi_0 = L\frac{d\varphi}{dl} \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\varphi_0}{L}. \qquad (18)$$

Подставляя выражение (18) и формулу (17), получим зависимость угла закручивания стержня φ_0 от закручивающего момента $M_З$ в следующем виде:

$$M_З = M_0 = \frac{\pi R^4}{2}\cdot G\cdot\frac{\varphi_0}{L}. \qquad (19)$$